

ΜΑΘΗΜΑ / ΤΑΞΗ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ο.Π. / Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 05 / 01 / 2026

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**ΘΕΜΑ Α****A1.** Σελ. 116 σχολ.**A2.** Σελ. 128 σχολ.**A3. α)** Σελ. 162 σχολ. **β)** Σελ. 185 σχολ.**A4. α)** Λάθος, **β)** Σωστό, **γ)** Σωστό, **δ)** Σωστό, **ε)** Λάθος.**ΘΕΜΑ Β****B1.** Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα και συνεχής. Οπότε f συνεχής και στο $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 + 2\alpha x + \alpha + 1) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + \eta\mu 2x + \beta) = \beta \\ &\Leftrightarrow \alpha + 1 = \beta. \end{aligned}$$

$$\text{Η } f \text{ παραγωγίσιμη και στο } x_0 = 0, \text{ άρα } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} \quad (1).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + 2\alpha x + \alpha + 1 - \beta}{x} \stackrel{\alpha+1=\beta}{=} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x^2 + 2\alpha)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 2\alpha) = 2\alpha.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + \eta\mu 2x + \beta - \beta}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + \eta\mu 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{x} + \frac{\eta\mu 2x}{x} = 2 + 2 = 4,$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x} = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{2x} \stackrel{2x=u}{=} 2 \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 2 \cdot 1 = 2.$$

$$\text{Η (1) μας δίνει: } 2\alpha = 4 \text{ ή } \alpha = 2, \text{ άρα } \beta = 3. \text{ Άρα } f(x) = \begin{cases} x^3 + 4x + 3, & x < 0 \\ 2x + \eta\mu 2x + 3, & x \geq 0 \end{cases}.$$

B2. (i) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της άρα και στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\text{Επίσης } f(0) = 2 \cdot 0 + \eta\mu(2 \cdot 0) + 3 = 3 \text{ και } f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} + \eta\mu\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + 3 = \pi + 3.$$

Άρα $f(0) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Συνεπώς η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος

Ενδιάμεσων Τιμών στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- (ii) Εφόσον $f(0) = 3 < \pi < \pi + 3 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ και δεδομένου ότι η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Ενδιάμεσων Τιμών στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \pi$.

B3. Κατακόρυφη ασύμπτωτη:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 + 4x + 3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[(x^3 + 4x + 3) \frac{1}{x^2} \right] = +\infty,$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^3 + 4x + 3) = 3 > 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Επομένως η κατακόρυφη

ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης είναι η ευθεία $x = 0$.

Πλάγια ασύμπτωτη:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 4x + 3}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{4}{x^2} + \frac{3}{x^3} \right) = 1,$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^3} = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f(x)}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3 + 4x + 3}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 4x + 3 - x^3}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x} = 0. \end{aligned}$$

Επομένως η ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο $-\infty$ είναι η ευθεία $y = x$.

B4. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 4$ (από B_1), άρα $f'(0) = 4$. Επίσης $f(0) = 3$.

Η εφαπτομένη (ϵ) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0, f(0))$, έχει

$$\text{εξίσωση: } (\epsilon): y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 3 = 4x \Leftrightarrow y = 4x + 3.$$

Η εφαπτομένη (δ) της γραφικής παράστασης της h στο σημείο $(x_0, h(x_0))$, έχει

εξίσωση: (δ): $y - h(x_0) = h'(x_0)(x - x_0)$. Η (δ) για να ταυτίζεται με την (ϵ) θα πρέπει

$$\text{να ισχύει: } h'(x_0) = 4 \quad (2) \quad \text{και} \quad h(x_0) = 4x_0 + 3 \quad (3).$$

$$\text{Είναι } h(x) = 2\ln(x - 3) + x^2 - 6x + 27, x > 3, \text{ άρα } h'(x) = 2 \frac{1}{x - 3} + 2x - 6, x > 3.$$

$$\text{Συνεπώς η (2) μας δίνει: } h'(x_0) = 4 \Leftrightarrow 2 \frac{1}{x_0 - 3} + 2x_0 - 6 = 4 \Leftrightarrow$$

$$2 + 2x_0(x_0 - 3) - 10(x_0 - 3) = 0 \Leftrightarrow 2x_0^2 - 16x_0 + 32 = 0 \Leftrightarrow 2(x_0 - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 4.$$

Επίσης $h(4) = 2\ln(4-3) + 4^2 - 6 \cdot 4 + 27 = 19$, άρα η σχέση (2) επαληθεύεται για $x_0 = 4$, αφού $h(4) = 4 \cdot 4 + 3$ ($19 = 19$).

Οπότε η εφαπτομένη (δ) της γραφικής παράστασης της h στο σημείο $(4, h(4))$, έχει εξίσωση $y - 19 = 4(x - 4) \Leftrightarrow y = 4x + 3$, δηλαδή ταυτίζεται με την (ε).

ΘΕΜΑ Γ

$$\begin{aligned} \Gamma 1. \alpha. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \cdot \ln(x-2) \stackrel{x-2=u}{=} \lim_{\substack{u_0 = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0 \\ u \rightarrow 0}} (u \cdot \ln u) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(\ln u)'}{\left(\frac{1}{u}\right)'} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{-\frac{1}{u^2}} = \lim_{u \rightarrow 0} (-u) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Επίσης } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) \cdot \ln(x-2) \stackrel{x-2=u}{=} \lim_{\substack{u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty \\ u \rightarrow +\infty}} (u \cdot \ln u) = +\infty.$$

$$\begin{aligned} \beta. \text{ Είναι } f(\Delta_1) &= f\left(\left[2, 2 + \frac{1}{e}\right]\right) \stackrel{f \downarrow}{=} \left[f\left(2 + \frac{1}{e}\right), \lim_{x \rightarrow 2} f(x)\right] \stackrel{\Gamma 1\alpha}{=} \left[-\frac{1}{e}, 0\right] \text{ και} \\ f(\Delta_2) &= f\left(\left[2 + \frac{1}{e}, +\infty\right)\right) \stackrel{f \uparrow}{=} \left[f\left(2 + \frac{1}{e}\right), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)\right] \stackrel{\Gamma 1\alpha}{=} \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right). \end{aligned}$$

Γ2. α. Θα βρούμε το πλήθος των λύσεων ισοδύναμα της εξίσωσης:

$$x - e^{\frac{\lambda}{x-2}} = 2 \Leftrightarrow e^{\frac{\lambda}{x-2}} = x-2 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{x-2} = \ln(x-2) \Leftrightarrow (x-2)\ln(x-2) = \lambda \Leftrightarrow f(x) = \lambda.$$

Εφόσον $\lambda \in \left(-\frac{1}{e}, 0\right)$, τότε παρατηρούμε ότι:

- $\lambda \in f(\Delta_1)$, άρα η εξίσωση έχει μία ρίζα x_1 μοναδική στο Δ_1 , αφού η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα αυτό και
- $\lambda \in f(\Delta_2)$, άρα η εξίσωση έχει μία ρίζα x_2 μοναδική στο Δ_2 , αφού η f είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα αυτό.

Άρα η εξίσωση έχει 2 ακριβώς ρίζες.

β. Εφόσον $f'(x) = (x-2)' \cdot \ln(x-2) + (x-2) \cdot (\ln(x-2))' = \ln(x-2) + 1$, τότε

$$f'(3) = 1, f'(4) = \ln 2 + 1 \text{ και } f'(5) = \ln 3 + 1.$$

Άρα θα δείξουμε ότι η εξίσωση:

$$3f'(3) + 2f'(4) + f'(5) - 6 = 6\ln(x-2) \Leftrightarrow 6\ln(x-2) + 6 - 3f'(3) - 2f'(4) - f'(5) = 0$$
$$\Leftrightarrow 6\ln(x-2) + 6 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot (\ln 2 + 1) - \ln 3 - 1 = 0 \Leftrightarrow 6\ln(x-2) - 2\ln 2 - \ln 3 = 0$$

έχει μοναδική ρίζα.

Θέτουμε $\Phi(x) = 6\ln(x-2) - 2\ln 2 - \ln 3$, η οποία:

- είναι συνεχής στο $[3, 5]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- μας δίνει $\Phi(3) = -2\ln 2 - \ln 3 < 0$ και

$$\Phi(5) = 6\ln 3 - 2\ln 2 - \ln 3 = 5\ln 3 - 2\ln 2 = \ln 3^5 - \ln 2^2 = \ln \frac{3^5}{4} > 0$$

Άρα $\Phi(3)\Phi(5) < 0$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (3, 5)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει: $\Phi(x_0) = 0$.

Εξετάζοντας όμως την Φ ως προς την μονοτονία, προκύπτει ότι για κάθε $x_1, x_2 \in (2, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \Rightarrow \ln(x_1 - 2) < \ln(x_2 - 2) \Rightarrow 6\ln(x_1 - 2) < 6\ln(x_2 - 2)$$
$$6\ln(x_1 - 2) - 2\ln 2 - \ln 3 < 6\ln(x_2 - 2) - 2\ln 2 - \ln 3 \Rightarrow \Phi(x_1) < \Phi(x_2).$$

Άρα η Φ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Οπότε η εξίσωση $\Phi(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(3) + 2f'(4) + f'(5) - 6 = 6\ln(x-2)$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (3, 5)$.

Β' Τρόπος: Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση:

$$3f'(3) + 2f'(4) + f'(5) - 6 = 6\ln(x-2) \Leftrightarrow 6\ln(x-2) + 6 = 3f'(3) + 2f'(4) + f'(5)$$

$$6(\ln(x-2) + 1) = 3f'(3) + 2f'(4) + f'(5) \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3f'(3) + 2f'(4) + f'(5)}{6}$$

έχει μοναδική ρίζα. Έχουμε f' γνησίως αύξουσα (αποδεικνύεται εύκολα):

$$3 \leq 3 < 5 \xrightarrow{f' \uparrow} f'(3) \leq f'(3) < f'(5) \Leftrightarrow 3f'(3) \leq 3f'(3) < 3f'(5) \quad (1)$$

$$3 < 4 < 5 \xrightarrow{f' \uparrow} f'(3) < f'(4) < f'(5) \Leftrightarrow 2f'(3) < 2f'(4) < 2f'(5) \quad (2)$$

$$3 < 5 \leq 5 \xrightarrow{f' \uparrow} f'(3) < f'(5) \leq f'(5) \quad (3)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1), (2) και (3), προκύπτει:

$$6f'(3) < 3f'(3) + 2f'(4) + f'(5) \leq 6f'(5) \Leftrightarrow f'(3) < \frac{3f'(3) + 2f'(4) + f'(5)}{6} \leq f'(5).$$

Δηλαδή ο αριθμός $\frac{3f'(3) + 2f'(4) + f'(5)}{6}$ βρίσκεται μεταξύ των $f'(3)$ και $f'(5)$.

Δεδομένου ότι η f' είναι συνεχής στο $[3, 5]$, σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιάμεσων

Τιμών, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (3,5)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$f'(x_0) = \frac{3f'(3) + 2f'(4) + f'(5)}{6}$ και επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα, τότε η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει $g'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in (2, +\infty)$. Πράγματι έχουμε:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{4} \left\{ \left[(x-2)^2 \right]' \cdot [2\ln(x-2)-1] + (x-2)^2 \cdot [2\ln(x-2)-1]' \right\} = \\ &= \frac{1}{4} \left\{ 2(x-2) \cdot [2\ln(x-2)-1] + (x-2)^2 \cdot \frac{2}{x-2} \right\} = \frac{1}{4} \{ 2(x-2) \cdot [2\ln(x-2)-1] + 2(x-2) \} \\ &= \frac{2(x-2)}{4} [2\ln(x-2)-1+1] = \frac{x-2}{2} \cdot (2\ln(x-2)-1+1) = (x-2)\ln(x-2) = f(x). \end{aligned}$$

Επομένως το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g'(x)$ είναι το ίδιο με το σύνολο τιμών της f , δηλαδή το $f((2, +\infty)) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty \right)$.

Γ4. Η g ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο $[3, e+2]$, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (3, e+2)$, τέτοιο ώστε:

$$g'(\xi) = \frac{g(e+2) - g(3)}{(e+2) - 3} \Leftrightarrow g'(\xi) = \frac{g(e+2) - g(3)}{e-1}.$$

$$\text{Όμως είναι } g(3) = \frac{1}{4}(3-2)^2 \cdot [2\ln(3-2)-1] = -\frac{1}{4} \text{ και}$$

$$g(e+2) = \frac{1}{4}(e+2-2)^2 \cdot [2\ln(e+2-2)-1] = \frac{1}{4}e^2 \cdot [2\ln e - 1] = \frac{1}{4}e^2$$

$$\text{Άρα } g'(\xi) = \frac{g(e+2) - g(3)}{e-1} \Leftrightarrow g'(\xi) = \frac{\frac{1}{4}e^2 - \left(-\frac{1}{4}\right)}{e-1} \Leftrightarrow g'(\xi) = \frac{\frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}}{e-1}$$

$$\Leftrightarrow g'(\xi) = \frac{e^2 + 1}{4(e-1)} \Leftrightarrow 4g'(\xi) = \frac{e^2 + 1}{e-1}.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θέτουμε $\frac{6 - xf(x)}{x^2 - 9} = g(x)$, οπότε θα είναι $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \frac{2}{3}$.

$$\text{Κοντά στο 3 έχουμε: } \frac{6 - xf(x)}{x^2 - 9} = g(x) \Leftrightarrow 6 - xf(x) = g(x) \cdot (x^2 - 9)$$

$$\Leftrightarrow xf(x) = 6 - g(x) \cdot (x^2 - 9) \Leftrightarrow f(x) = \frac{6 - g(x) \cdot (x^2 - 9)}{x}.$$

$$\text{Άρα θα είναι: } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 - g(x) \cdot (x^2 - 9)}{x} = \frac{6 - \frac{2}{3} \cdot (3^2 - 9)}{3} = 2.$$

$$\text{Όμως η } f \text{ είναι συνεχής στο } 3 \text{ οπότε } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) \Leftrightarrow f(3) = 2.$$

Επίσης η f' είναι συνεχής (αφού f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη) και επειδή $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε θα διατηρεί σταθερό το πρόσημό της στο $\mathbb{R}$.

Εφόσον $f'(\rho) = -2 < 0$, τότε $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. α. Η f είναι συνεχής συνάρτηση, οπότε παρατηρώντας ότι $\lim_{h \rightarrow 0} h^2 = 0$ και

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x+3h) + 2f(x) - 3f(x+h)] = f(x) + 2f(x) - 3f(x) = 0, \text{ το ζητούμενο όριο}$$

είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Σύμφωνα με τον κανόνα του De L'Hospital,

$$\text{έχουμε: } L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+3h) + 2f(x) - 3f(x+h))'}{(h^2)'} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3f'(x+3h) - 3f'(x+h)}{2h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(f'(x+3h) - f'(x+h))}{2h} = \frac{3}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+3h) - f'(x+h)}{h} =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x+3h) - f'(x)}{h} - \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \right), \text{ όπου για το}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+3h) - f'(x)}{h} = 3 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+3h) - f'(x)}{3h}, \text{ αν θέσουμε } 3h = u, \text{ θα είναι}$$

$$u_0 = \lim_{h \rightarrow 0} 3h = 0, \text{ άρα θα γίνει } 3 \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f'(x+u) - f'(x)}{u} = 3f''(x).$$

Συνεπώς το ζητούμενο όριο θα γίνει:

$$L = \frac{3}{2} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f'(x+3h) - f'(x)}{h} - \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \right) = \frac{3}{2} \cdot (3f''(x) - f''(x)) = 3f''(x).$$

β. Είναι $L = 3f''(x)$ με $x \in \mathbb{R}$, άρα αν $x=3$, τότε $L = 3f''(3) \Leftrightarrow 6 = 3f''(3) \Leftrightarrow f''(3) = 2$.

Οπότε $g(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} + (f''(3) + 1)x \Leftrightarrow g(x) = 2\sqrt{x^2 + 1} + 3x$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2\sqrt{x^2 + 1} + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 3x}{x} \underset{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 3x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(-2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 3 \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 3 \right) = -2\sqrt{1+0} + 3 = 1. \text{ Επομένως:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2\sqrt{x^2 + 1} + 2x) = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{|x|\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x}$$

$$\stackrel{x < 0}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = 0.$$

Άρα η ασύμπτωτη της C_g στο $-\infty$, είναι η $y = x$.

Δ3. α. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(3, f(3))$, δηλαδή στο $A(3, 2)$, έχει εξίσωση $y - f(3) = f'(3)(x - 3)$. Όμως έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 - g(x) \cdot (x^2 - 9)}{x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 - g(x) \cdot (x^2 - 9) - 2x}{x(x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2x + 6 - g(x) \cdot (x - 3)(x + 3)}{x(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2(x - 3) - g(x) \cdot (x - 3)(x + 3)}{x(x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)[-2 - g(x) \cdot (x + 3)]}{x(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2 - g(x) \cdot (x + 3)}{x} = \frac{-2 - \frac{2}{3} \cdot (3 + 3)}{3} = -2, \end{aligned}$$

άρα $f'(3) = -2$. (σχόλιο: για τον υπολογισμό του ορίου της παραγώγου μπορεί να χρησιμοποιηθεί και ο κανόνας του De L'Hospital).

Η εξίσωση είναι $y - 2 = -2(x - 3) \Leftrightarrow y = -2x + 8$.

Το σημείο $M(x_{(t)}, y_{(t)})$, ανήκει στην εφαπτομένη, οπότε $y_{(t)} = -2x_{(t)} + 8$.

Με παραγώγιση κατά μέλη έχουμε: $y'_{(t)} = -2x'_{(t)}$ και επειδή $x'_{(t)} = -2$, τότε

θα είναι: $y'_{(t)} = -2(-2) = 4 \text{ cm/sec}$.

β. Η f' :

- είναι συνεχής στο $[p, 3]$
- είναι παραγωγίσιμη στο $(p, 3)$
- μας δίνει $f'(p) = -2 = f'(3)$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (p, 3) \subseteq \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

Δ4. Η F είναι μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$, οπότε $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\begin{aligned} 2F(5) > F(4) + F(6) &\Leftrightarrow F(5) + F(5) > F(4) + F(6) \Leftrightarrow F(5) - F(4) > F(6) - F(5) \\ &\Leftrightarrow \frac{F(5) - F(4)}{1} > \frac{F(6) - F(5)}{1} \Leftrightarrow \frac{F(5) - F(4)}{5 - 4} > \frac{F(6) - F(5)}{6 - 5}. \end{aligned}$$

Η F είναι:

- ❖ συνεχής στα διαστήματα $[4, 5]$ και $[5, 6]$
- ❖ παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(4, 5)$ και $(5, 6)$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχουν:

- ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (4, 5)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$F'(\xi_1) = \frac{F(5) - F(4)}{5 - 4} \Leftrightarrow f(\xi_1) = \frac{F(5) - F(4)}{5 - 4} \quad \text{και}$$

- ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (5, 6)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$F'(\xi_2) = \frac{F(6) - F(5)}{6 - 5} \Leftrightarrow f(\xi_2) = \frac{F(6) - F(5)}{6 - 5}.$$

Όμως είναι $4 < \xi_1 < 5 < \xi_2 < 6$, άρα:

$$\xi_1 < \xi_2 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(\xi_1) > f(\xi_2) \Leftrightarrow \frac{F(5) - F(4)}{5 - 4} > \frac{F(6) - F(5)}{6 - 5} \Leftrightarrow 2F(5) > F(4) + F(6).$$